C O N C O U R S D ' A D M I S S I O N ANNEE 1991

A L ' E C O L E D E L ' A I R

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES (Durée : 3 h 30 - coefficient : 9)

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I

A - Pour une fonction f, définie continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, et un nombre réel p, on note

$$I(f,p) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx,$$ si cette intégrale existe.

1°) Soit $p_0 \in \mathbb{R}$ tel que $I(f,p_0)$ converge absolument. Que peut-on dire de $I(f,p)$ pour tout $p > p_0$?

2°) Dans cette question, on prend $f(x) = \sin(x)$.

a) Montrer que $I(f,p)$ existe pour tout $p > 0$.

b) Calculer $I(f,p)$ pour $p > 0$.

3°) On prend $p > 0$ et comme fonction f, la restriction, à $[0, +\infty[$, d'une fonction continue, périodique de période T .

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, sur $[0, +\infty[$, par

$f_0(x) = f(x)$ si $0 \leq x < T$ et $f_0(x) = 0$ sinon

$f_n(x) = f_0(x - nT)$ pour $n > 0$.

on note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)e^{-px}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions telles que $g_n(x) = f_n(x)e^{-px}$.

a) Montrer que $I(f,p)$ existe.

b) Montrer que la série de fonctions, de terme général g_n , converge uniformément vers g, sur $[0, +\infty]$.

c) Exprimer $I(f_n,p)$ à l'aide de $I(f_0,p)$.

d) Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} I(fk,p) - I(f,p) \right| \leq M \int_{(n+1)T}^{+\infty} e^{-px} dx$$

T.S.V.P.

En déduire $I(f,p)$ en fonction de $I(f_0,p)$, p et T.

e) Calculer $\int_0^{+\infty} |\sin x|\, e^{-px} dx$.

1°) Pour $x > 0$, x s'écrit de façon unique sous la forme

$x = 2^k\sqrt{2}y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [1/\sqrt{2} , \sqrt{2}]$

et $\mathrm{Ln}(x) = (2k + 1)\,\mathrm{Ln}(\sqrt{2}) + \mathrm{Ln}(y)$

2°) Pour $y \in [1/\sqrt{2} , \sqrt{2}]$, en posant $u = \frac{y-1}{y+1}$,

on obtient $\mathrm{Ln}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2.u^{2i+1}}{2i+1}$. La somme partielle d'ordre 6 de cette dernière série constituant une approximation de $\mathrm{Ln}(y)$ à 10^{-12} près.

Ecrire les procédures et fonctions suivantes :

1°) Procedure Decompose (x : real ; VAR k : integer ; VAR y : real) ;
qui pour $x > 0$, détermine k et y tels que
$x = 2^k \sqrt{2}\, y$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [1/\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2°) Function Serie (y : real) : real ;
qui, pour $1/\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$, donne l'approximation de Ln(y) par la somme partielle d'ordre 6 de la série :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\,\frac{u^{2i+1}}{2i+1} \quad \text{avec } u = \frac{y-1}{y+1} .$$

3°) Function LNapprox (x : real) : real ;
qui, pour $x > 0$ donne une approximation de Ln(x).

FIN

*
* *